

Gezeitenkräfte

Oberviechtach

24.1.2012

Friedhelm Kuypers

Von einer Flut zur nächsten vergehen

12 h 25 min

Dies ist ein halber Mondtag. Daher vermuteten schon die alten Griechen, dass der Mond Ebbe und Flut verursacht.

Aber erst Newton stellte genaue Berechnungen an.

Übersicht

Berechnung der Gezeitenkräfte 3

Auswirkungen auf den Mond 10

Vulkanismus auf dem Jupitermond Io 11

Roche Grenze 13

Komet Shoemaker-Levy 9 14

Berechnung der Gezeitenkräfte

Die Gezeitenkräfte auf der Erde werden durch die **Inhomogenität der Gravitationskräfte** von Mond und Sonne erzeugt – nicht durch Fliehkräfte.

Die Gezeitenkräfte des Mondes sind gut doppelt so groß wie die Gezeitenkräfte der Sonne.

Grundlagen: **1)** Die Gravitationsfelder einer rotationssymmetrischen Massenverteilung $\rho = \rho(r)$ (z. B. einer homogenen Kugel) und einer gleich schweren Punktmasse sind gleich groß.

2) Mit „actio = reactio“ folgt: Die Gravitationskräfte auf eine rotationssymmetrische Massenverteilung und auf eine gleich schwere Punktmasse sind gleich.

3) Schwerpunktsatz → Schwerpunkte bewegen sich wie Massenpunkte.

Die Mittelpunkte von Erde und Mond kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt S_{E-M} . Er liegt innerhalb der Erde und hat den Abstand $3/4 \cdot R_E$ vom Erdmittelpunkt.

Die Bewegung der Erde setzt sich aus zwei Bewegungen zsn. :

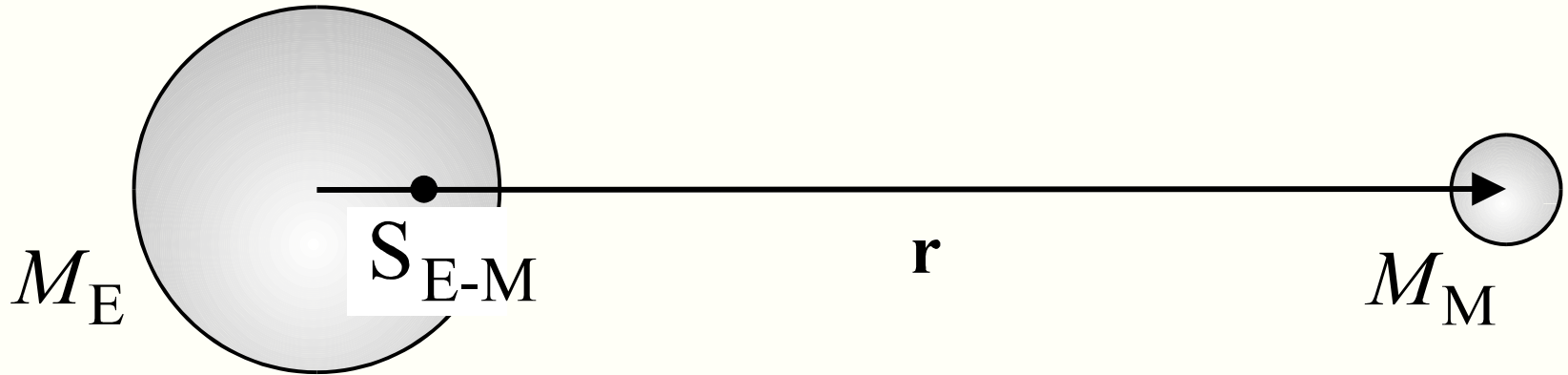
1) **Rotation um die eigene Achse**. Fliehkräfte zeigen überall radial nach außen und sind überall gleich groß

➔ Kein Beitrag zu Ebbe und Flut.

2) **Verschiebung** der Erde auf einer Kreisbahn um S_{E-M} . **Dabei rotiert die Erde nicht**, da Erde und Mond nicht starr verbunden sind. **Eine sog. „Revolution“**.

Alle Punkte der Erde beschreiben **Kreisbahnen mit gleichem Radius** $3/4 \cdot R_E$, aber **mit verschiedenen Kreismittelpunkten**.

Die Fliehkräfte dieser Revolution sind überall auf der Erde gleich groß.



Beschleunigung der Erde bei der Verschiebung (Revolution) :

$$M_E \mathbf{a}_E = \gamma \frac{M_E M_M}{r^3} \mathbf{r}$$

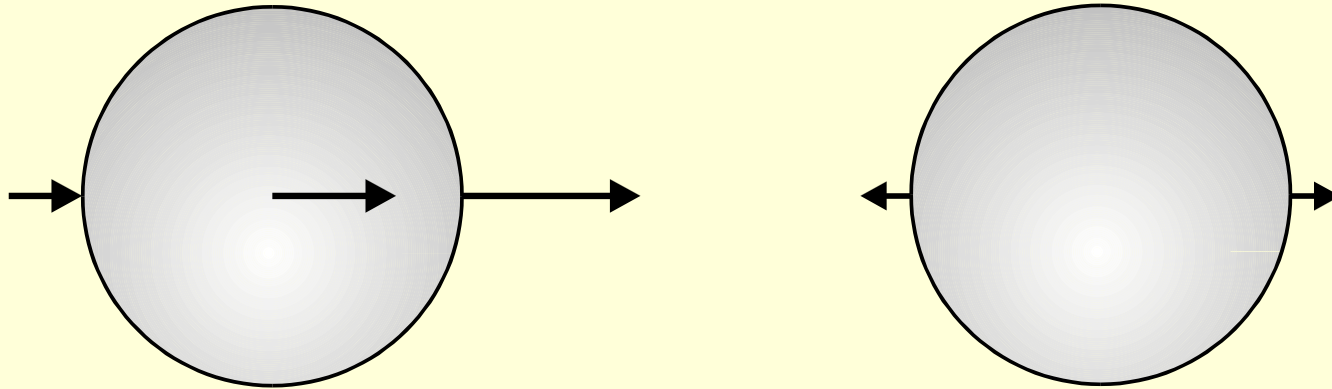
Daher haben **alle** Punkte auf der Erde bei der Revolution die gleiche Beschleunigung :

$$\mathbf{a}_E = \gamma \frac{M_M}{r^3} \mathbf{r}$$

→ **Fliehkräfte der Revolution sind überall auf der Erde gleich groß.**

Nochmals mit anderen Worten: Bei der Revolution wirken **überall** auf und in der Erde **dieselben Fliehkräfte** $- m \mathbf{a}_E$ auf eine Masse m .

Die **Gravitationskräfte des Mondes** auf die Masse m sind hingegen an verschiedenen Stellen **verschieden groß**.

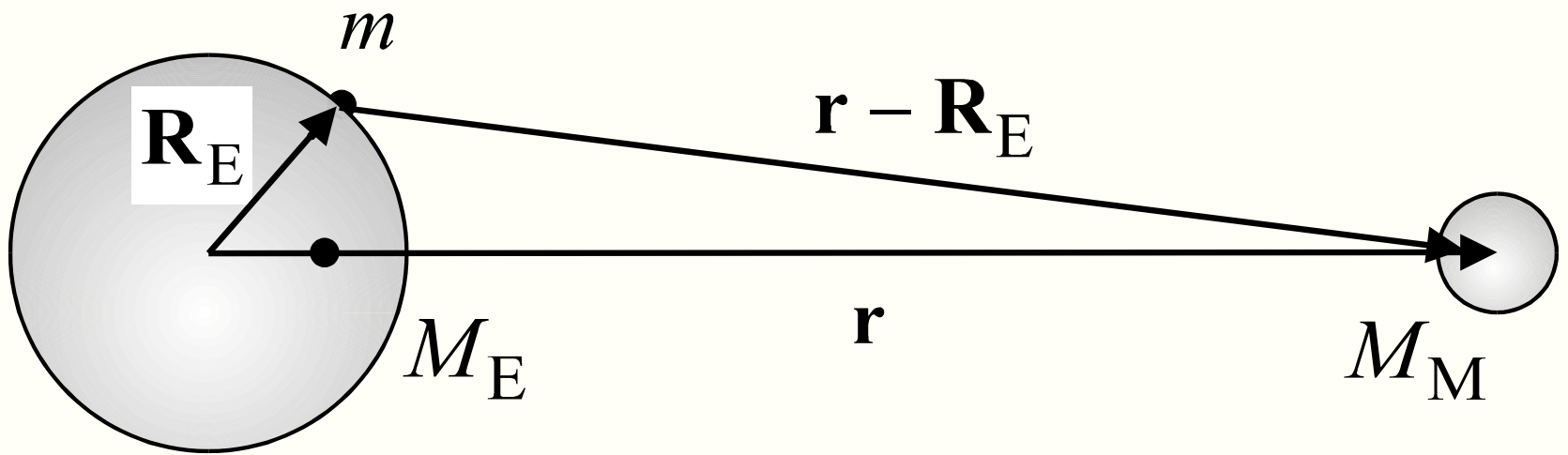


Gravitationskräfte. **Nur im Erdmittelpunkt ist Gravitationskraft des Mondes = - Fliehkraft der Revolution der Erde.**

Gravitationskräfte + Fliehkraft = Gezeitenkräfte

Die **Gezeitenkraft** an einem Punkt A ist die **Differenz zwischen**

- der Gravitationskraft des Mondes im Schwerpunkt der Erde und
- der Gravitationskraft des Mondes im Punkt A der Erde.



Auf die ruhende Masse m wirken 3 Kräfte:

Erd- und Mondanziehungskraft sowie die Kraft des Bodens.

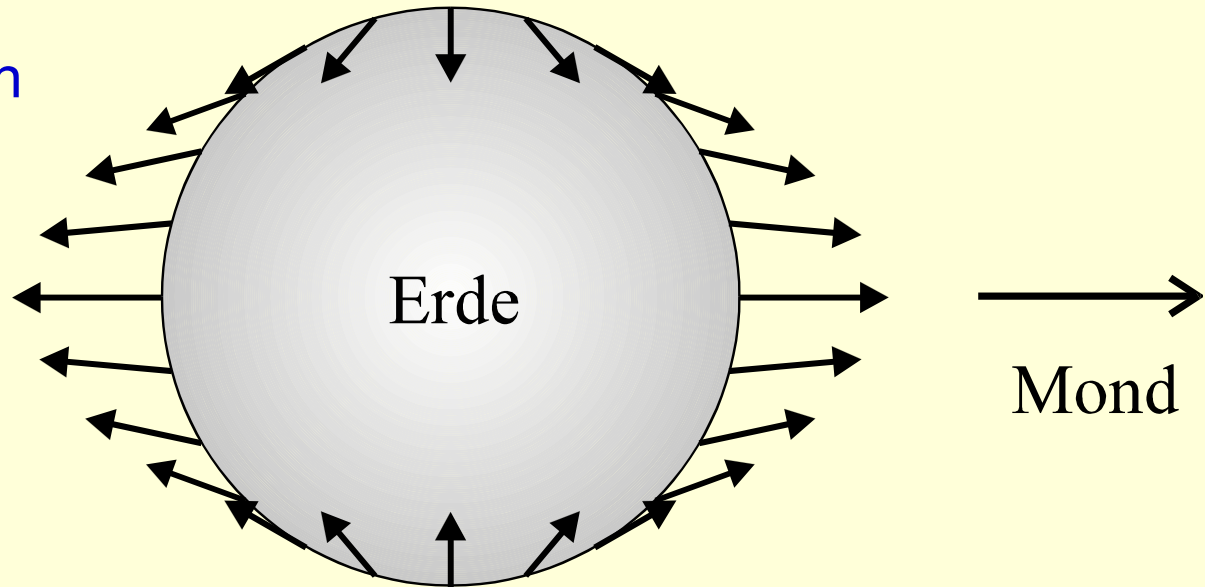
$$\begin{aligned}
 m \mathbf{a}_E &= \gamma \frac{m M_M}{r^3} \mathbf{r} = - \underbrace{\gamma \frac{m M_E}{R_E^3} \mathbf{R}_E}_{\text{Erdanziehungskraft}} \\
 &\quad + \underbrace{\gamma \frac{m M_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_E|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{R}_E)}_{\text{Mondanziehungskraft}} + \mathbf{F}_{\text{Boden}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\text{Boden}} = & \underbrace{\gamma \frac{m M_E}{R_E^3} \mathbf{R}_E}_{\text{– Erdanziehungskraft}} + \\
& \underbrace{\gamma \frac{m M_M}{r^3} \mathbf{r}}_{\text{– Fliehkraft}} - \underbrace{\frac{\gamma m M_M}{r^3 \left(1 - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_E}{r^2} + \frac{R_E^2}{r^2} \right)^{3/2}}}_{\text{– Mondanziehungskraft}} (\mathbf{r} - \mathbf{R}_E) \\
& \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{– Gezeitenkraft}}
\end{aligned}$$

Übersichtlicher: Für $R_E \ll r$ Taylorentwicklung : $(1 + \varepsilon)^k \approx 1 + k \varepsilon$

$$\mathbf{F}_{\text{Boden}} \approx \gamma \frac{m M_E}{R_E^3} \mathbf{R}_E - \underbrace{\gamma \frac{m M_M}{r^3} \left(3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_E}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{R}_E \right)}_{\text{Gezeitenkraft}}$$

Gezeitenkraft in
1. Näherung



Auf der mondzugewandten und der mondabgewandten Seite der Erde sind die Gezeitenkräfte maximal und in erster Näherung gleich groß :

$$\mathbf{F}_{\text{Gezeiten}}^{\text{max}} \approx 2 \gamma \frac{m M_{\text{M}}}{r^3} \mathbf{R}_{\text{E}} \quad \text{auf mondzu- und abgewandter Seite}$$

In zweiter Näherung ist die Gezeitenkraft auf der mondzugewandten Seite um 7% größer.

Auswirkungen auf den Mond

Der Mond war früher flüssig und drehte sich schneller als heute. Die beiden Flutberge, die die Erde auf dem flüssigen Mond erzeugte, bremsten die Drehung des Mondes so lange, bis der Mond der Erde immer dieselbe Seite zeigte. Sie ist heute ein erstarrter Flutberg.

Die Reibungsverluste der Flutberge auf der Erde verringern den Drehimpuls der Erdrotation. Früher waren die Tage kürzer.

Wegen Drehimpulserhaltung des Gesamtsystems steigt der Bahndrehimpuls L des Mondes, der der Erde immer dasselbe Gesicht zeigt. Dabei entfernt sich der Mond von der Erde:

$$M_{\text{M}} \frac{v^2}{r} \sim M_{\text{M}} \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad L = M_{\text{M}} r v \sim M_{\text{M}} \sqrt{r}$$

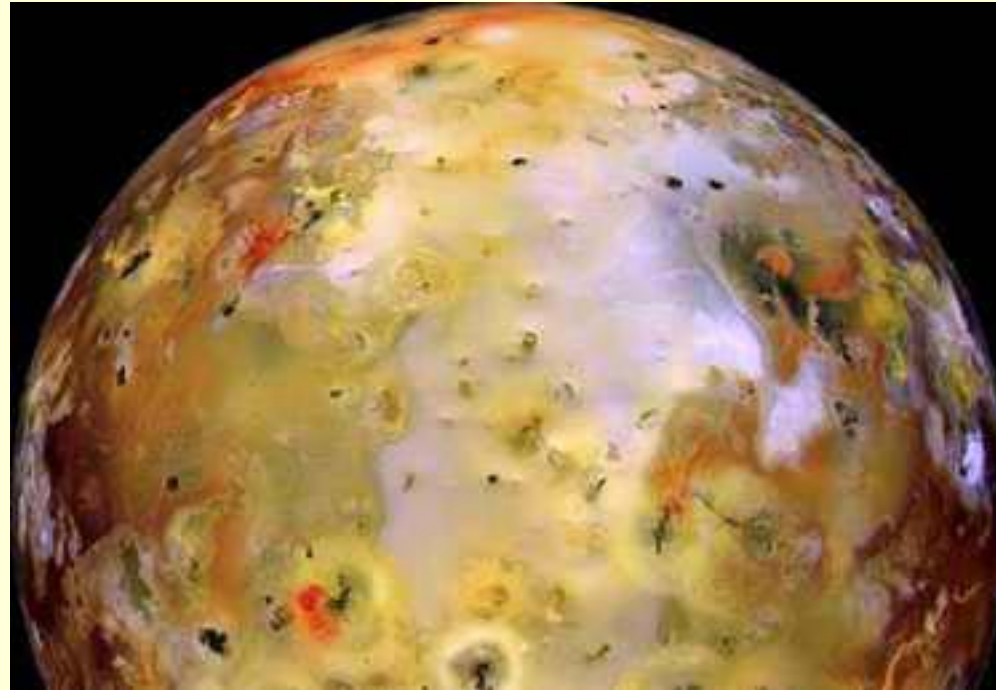
Die heutige Drift-Rate beträgt 3.82 cm/Jahr.

Vulkanismus auf dem Jupitermond Io

Der Jupitermond **Io** ist mit einem Radius von **1821 km** der viergrößte Mond im Sonnensystem.

Er zeigt Jupiter immer dasselbe Gesicht (sog. „**gebundene Rotation**“) und läuft auf einer leicht elliptischen Bahn mit einem Radius von nur **421.000 km**.

Die Oberfläche ist größtenteils mit **Schwefel** bedeckt.

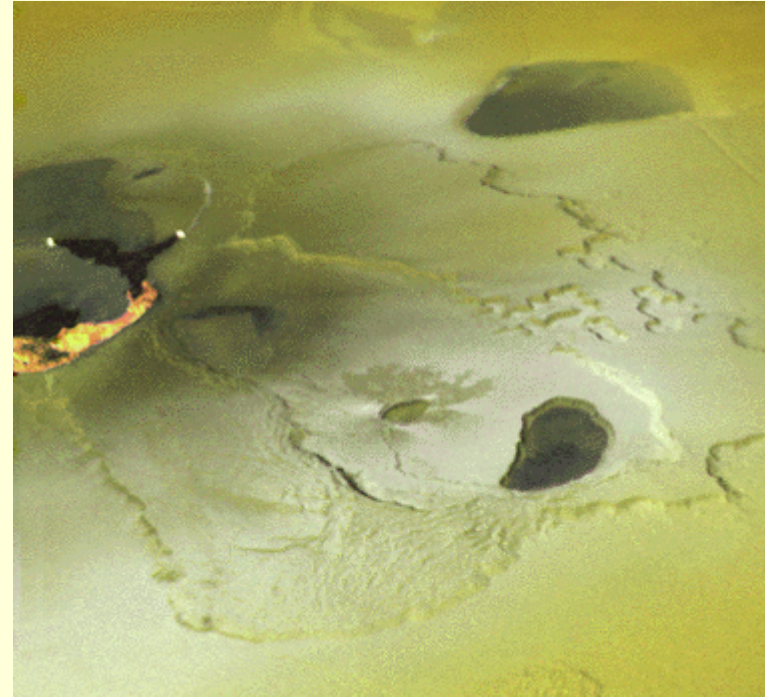


1979 näherte sich die Raumsonde **Voyager 1** dem Mond Io bis **18.640 km**. Man erwartete einen geologisch absolut toten Mond – ohne Plattentektonik und ohne Vulkanismus.

Faustdicke Überraschung:

Io hat mit Abstand den stärksten Vulkanismus im Sonnensystem :

- Etwa **500 aktive Vulkane**
- **300 km hohe Eruptionen**
- **Lavaströme** – hunderte Kilometer lang
- Seen aus geschmolzenem Schwefel



Die Gezeitenkräfte verursachen den Vulkanismus.

300 m hohe Deformationen der Io-Oberfläche.

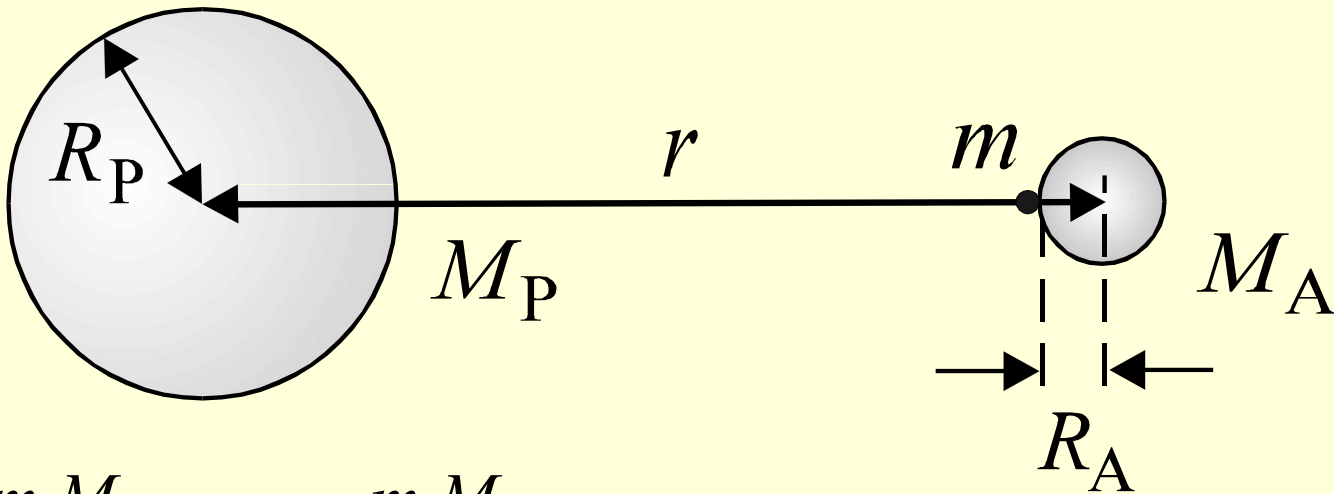
Wegen der gebundenen Rotation von Io ist nicht die absolute Stärke der Gezeitenkraft, sondern ihre zeitliche Änderung wichtig.

Die zeitliche Änderung wird durch die **Ellipsenbahn von Io** verursacht.

Roche Grenze

Zur Erinnerung : $\mathbf{F}_{\text{Gezeiten}}^{\text{max}} \approx 2 \gamma \frac{m M_M}{r^3} \mathbf{R}_E \sim \frac{M_M}{r^3}$

Wir betrachten nun einen Asteroiden in der Nähe eines Planeten.



$$\gamma \frac{m M_A}{R_A^2} = 2 \gamma \frac{m M_P}{r_{\text{Roche}}^3} R_A$$

$$r_{\text{Roche}} = 1,260 \cdot \left(\frac{M_P}{M_A} \right)^{1/3} R_A = 1,260 \cdot \left(\frac{\rho_P}{\rho_A} \right)^{1/3} R_P$$

Komet Shoemaker-Levy 9

1992 wurde der Komet SL9 ($d \approx 4 \text{ km}$) bei seiner kürzesten Annäherung an Jupiter (27.000 km) durch Gezeitenkräfte in mindestens 21 Teile zerlegt mit $d < 1 \text{ km}$.

Zum Vergleich: Der Dinosaurier-Killer hatte $d \approx 10 \text{ km}$

1994 stürzten die Bruchstücke mit 60 km/s auf Jupiter. Energie von 50 Millionen Hiroshima-Bomben. Jahrelang waren Flecken aus Schutt und Trümmern sichtbar.

Andere Anwendungen: Die Saturnringe liegen innerhalb der Roche-Grenze, die großen Monde des Sonnensystems außerhalb.

